

îiϕ Ez^ ^> d
'Œ ótôš u D %o•

ŽW Œ({Œu v > À o • Œ]‰š}}vld ŒP š }(D •μŒ u v š
/š u
W}•]š}}v

îîEz^ ^> d
'Œ • ótô /š u D %• ~ }vš]vµ •

ŽW Œ({Œu v > À o • Œ]‰š}}vld ŒP š }(D •µŒ u vš

/š u W}•]š]]v	d •š ^ ••]yš u dÇ Z •‰}v•	%W}}]vš•D} o]šÇ W> ld}DŽ	• Œ]‰š}}v
------------------	------------------------------	--------------------------	-----------

íî ^‰ I]vP }v•šŒµ š î ^‰ I]vPW> XîX^XóvšXv š }•l (µ •š}}v•U ‰Œ Œ•]v({Œu š }
v }všŒ] µš š } }vÀ Œ• š}}vX
Œ‰ v }šP Wvš µ•••]u‰o U Œ‰ v U v l}Œ
íí ^‰ I]vP }v•šŒµ š î ^‰ I]vPW> XðX^XšµXí Œ• vš}v •Œ] }Œ }vÀ Ç Œ o À vš
š]o• v v ŒŒ š •š}ŒÇ }Œ ‰Œ} ••]v •
}uu v]vPšµ vš µ•••]u‰o U Œ‰ v U v
}u‰o Œ• vš v • v (š)µ]v ŒPµ P
íî ^‰ I]vP }v•šŒµ š î ^‰ I]vPW> XñX^XšµXU]vš Œ‰Œ š (š• v À oµ š À] v U
‰}}]vš•]v }Z Œ vš u vv ŒU v ‰Œ}À] v
}Œ o]u •µ‰‰}Œš Ç Œ •}v•X
u ŒP]šµW vš vU Á]šZ u} Œ š •µ‰‰}Œš U
] vš]({Ç •}u ÁµĐ Œ• vU }`‰‰o
í í Dµoš]‰o r í >]•š v]vPW> XîX>XóróXî (v v P5P`ŒŒv`

îîϑEz^ ^> d
'Œ • ótô /š u D %• ~ }vš]vμ •

ŽW Œ({Œu v > À o • Œ]‰š}}vld ŒP š }(D •μŒ u v š

/š u W}•]š]]v	d • š ^ • •]yš u dÇ	%W}}]vš • D} o]š Ç W > ld}DŽ	• Œ]‰š}}v
------------------	----------------------	-------------------------------	-----------

đ í Dμoš]‰o r í >]•š v]vP
Z}]

îîŹEz^ ^> d
'Œ • ótô /š u D %• ~ }vš]vµ •

ŽW Œ({Œu v > À o • Œ]‰š}}vld ŒP š }(D •µŒ u vš

/š u W}•]š]]}v	d •š ^ ••]yš u dÇ ‰W}}]vš•D} o]šÇ W> ld}DŽ	Œ]‰š}}v		
-------------------	---	---------	--	--

õ	í	Dµoš]‰o r _í Z}}	Z]vP W> XíXZZXóřôXí •vš v •š]P všo]u‰}Œš vš]v]Á] µ o•U u]v] •U •µ‰‰}Œš]vP] •U }v ‰š•U À] v U uµoš]‰o ‰}}]vš•} (À] ÁU o]š Œ ŒÇ À] •U u •• P }Œ š]Z u PŒ ro À o š ŒšX u ŒP]vš]P W vš vU Á]šZ u } Œ š •µ‰‰}ŒšU] vš](Ç •}u Á}Œ •U ‰ZŒ ••U }Œ (Á •]u‰o
îî	í	Dµoš]‰o r _í Z}}	Z]vP W> XîXZZXóřôXí •vš v •š]P všo]u‰}Œš vš]v]Á] µ o•U u]v] •U •µ‰‰}Œš]vP] •U }v ‰š•U À] v U uµoš]‰o ‰}}]vš•} (À] ÁU o]š Œ ŒÇ À] •U u •• P }Œ š]Z u PŒ ro À o š ŒšX
íí	í	Dµoš]‰o r _í Z}}	Z]vP W> XîXZZXóřôXí dŒ v•]š]]vš]P Wš vU Á]šZ o]u]š •µ‰‰}ŒšU] vš](Ç u}•š ‰ZŒ ••U •]u‰o •vš v •U }Œ Œ‰‰Xî }Œ }u‰o Œ•]P vš v }Œ š]Z všÀ Ç l Ç š]o•U • (µ v U }v v š]]v•U Œ o š]]v•Z]] }v oµ•]]v•U v l}Œ]vš ŒŒš]]vŒ À o š ŒšX
îî	í	Dµoš]‰o r _í Z}}	Z]vP W> XôXZZXóřôXí Œ‰‰v]vš]P W vš v] vš]](Ç u}•š •]u‰o }Œ •}u Œ‰‰v }Œ }u‰o Œ š}P ššZ Œ šZ š À] v U À vš•U }Œ]vŒŒ š]]v•Z]]‰ š Œš•X
íî	í	Dµoš]‰o r _í Z}}	Z]vP W> XôXZZXóřôXí Œ‰‰v]vš]P W vš v }]P vš]]((]Ç vš o u vš•U }v v š]]v•U Œ o š]]v•Z]]‰•U š}‰] •U v l}Œ š šZ š Œ •š Ç]šZŒ š •šŒ]P š]P]Œ‰•o~ }Œ •}u Œ‰‰v }Œ }u‰o Œ •vš v •šZ š Á š}P šZ Œ š} š Œu]v o u vš•U }v v š]]v•U š}‰]]v PŒ ro À o š Œš•X

îîϑEz^ ^> d
'Œ • ótô /š u D %• ~ }vš]vμ •

ŽW Œ({Œu v > À o • Œ]‰š}}vld ŒP š }(D •μŒ u v š

/š u W}•]š]]v	d • š ^ • •]yš u dŒ	%W}}]vš • D} o]šŒ W > ld}DŽ	• Œ]‰š}}v
------------------	----------------------	------------------------------	-----------

}uu v]vPμ v š . v] . v š](Œ À

íð í Dμoš]‰o r í Z]vP W > XñXZXórôXđ
Z}}

îîϕEz^ ^> d
 'Œ • ótô /š u D %• ~ }vš]vμ •

ŽW Œ({Œu v > À o • Œ]‰š}}vld ŒP š }(D •μŒ u vš

/š u W}•]š]]v	d •š ^ ••]yš u dÇ ‰W}}]vš•D} o]šÇ W> ld}DŽ	• Œ]‰š}}v
------------------	---	-----------

dŒ v•]š]]vš]μPWš vU Á]šZ o]u]š •μ‰‰}ŒšU
] vš](Ç u}•š %ZŒ ••U •]u‰o • vš v •U }Œ
 íõ î Dμoš]‰o r_i >]•š v]vRV> XîX>XóvšXî
 AE‰v }Œ }u‰o AE•]Rvš α }ŒšZvšÀ Ç
 | Ç š]o•U • <μ v U }vv š}}v•U Œ o š}}v•Z]
 }v oμ•}}v•U v l}Œ]všPŒ š}pvÀ o
 •‰}l v]• }μŒ• X
 dŒ v•]š]]vš]μPWš v š}Œsu]ŒšZ
 îî î Dμoš]‰o r_i >]•š v]vRV> XîX>XóvšXî
 o]š Œ o v (Á)(šZ (]PμŒ š]À }Œ }vv}š
 u v]vP• }(d] Œ í v•d]ŒšZ ŒŒ]u‰ š
]v PŒ ro À o •‰}l v]• }μŒ• X
 u ŒP]vš]μPW vš vU Á]šZ u} Œ š •μ‰‰}ŒšU
] vš](Ç •}u Á}Œ •U ‰ZŒ ••U }Œ (Á •]u‰o
 îí î Dμoš]‰o r_i >]•š v]vRV> XîX>XóvšXî
 • š]Pvš o }Œ }vÀ Ç l Ç š]o•U
 • <μ v U }vv š}}v•U Œ o š}}v•Z]‰•U }v 5Pv>

îîϑEz^ ^> d
 'Œ • ótô /š u D %• ~ }vš]vμ •

ŽW Œ({Œu v > À o • Œ]‰š}}vld ŒP š }(D •μŒ u vš

/š u W}•]š]]v	d • š ^ • •]yš u dÇ‰W}}vš•D} o]šÇ W> ld}DŽ	Dμoš]‰o r í Z}}	‰o r í	>]•š v]vŒV> XíX> XóvšXî • šZPš o }Œ }vÀ Ç l Ç š]o•U	• Œ]‰š}}v
î ð	î	Dμoš]‰o r í Z}}	‰o r í	>]•š v]vŒV> XíX> XóvšXî • šZPš o }Œ }vÀ Ç l Ç š]o•U	vš Œ]vŒW vš u Ç U Á]šZ • μ • š vš] o • μ‰‰}Œ š] vš](Ç (Á Á}Œ • U • Z}Œ š ‰ZŒ • • U }Œ ‰Œ • <μ v U }v v š]]v•U Œ o š]]v•Z]‰•U }v o μ• v l}Œ]vš Œ]vš]]ŒŒ ro À o •‰} l v]• }μŒ• X
î ñ	î	Dμoš]‰o r í Z}}	‰o r í	>]•š v]vŒV> XíX> XóvšXî • šZPš o }Œ }vÀ Ç l Ç š]o•U	dŒ v•]š]]vš]μ P Wš v š]Œ su]Œ š Z o]š Œ o v (Á)(š Z (]P μŒ š]Á }Œ }v v}š u v]vP• }(d]Œ í v d]Œ í Á}Œ • v š Z]Œ]v PŒ ro À o •‰} l v]• }μŒ• X
î ò	î	Dμoš]‰o r í Z}}	‰o r í	Z]vP W> XíXZ XóvšXî • šZPš o }Œ }vÀ Ç l Ç š]o•U	vš Œ]vŒW vš u Ç U Á]šZ • μ • š vš] o • μ‰‰}Œ š] vš](Ç (Á Á}Œ • U • Z}Œ š ‰ZŒ • • U }Œ ‰Œ • vš v • šZ vš o]u‰}Œ š vš]v]Á] μ o•U u]v] • U • μ‰‰}Œ š]vP] • U }v ‰š•U À] v U u μoš]‰o ‰}vš• }(Á] Á U o]š Œ ŒÇ Á] • U u •• P }Œ šZ u PŒ ro À o š Œ š X
î ó	î	Dμoš]‰o r í Z}}	‰o r í	Z]vP W> XíXZ XóvšXî • šZPš o }Œ }vÀ Ç l Ç š]o•U	dŒ v•]š]]vš]μ P Wš v š]Œ su]Œ š Z o]š Œ o v (Á)(š Z (]P μŒ š]Á }Œ }v v}š u v]vP• }(d]Œ í v d]Œ í Á}Œ • v š Z]Œ]v PŒ ro À o š Œ š X
î ô	î	Dμoš]‰o r í Z}}	‰o r í	Z]vP W> XíXZ XóvšXî • šZPš o }Œ }vÀ Ç l Ç š]o•U	u ŒP]vŒW vš vU Á]šZ u } Œ š • μ‰‰}Œ š U] vš](Ç • u Á}Œ • U ‰ZŒ • • U }Œ (Á •]u‰ • <μ v U }v v š]]v•U Œ o š]]v•Z]‰•U }v o μ• v l}Œ]vš Œ]vš]]ŒŒ ro À o š Œ š X
î õ	î	Dμoš]‰o r í Z}}	‰o r í	Z]vP W> XíXZ XóvšXî • šZPš o }Œ }vÀ Ç l Ç š]o•U	vš Œ]vŒW vš u Ç š ZŒ o]š Œ o u v]vP]u‰]š PŒ ro À o š Œ š X

• $\hat{\rho} \in \mathbb{R}^{d \times d}$
'OE • $\hat{\rho} / \text{tr}(\hat{\rho})$ • $\sim \text{vec}(\hat{\rho})$ •

îîϑ Ez^ ^> d
 'Œ óô/š u D %• ~ }vš]vμ •

ŽW Œ({Œu v > À o • Œ]‰š}}vld ŒP š }(D •μŒ u vš

/š u W}•]š]]v	d • š ^ • •]yš u dÇ‰W}}vš • D} o]šÇ W> ld}DŽ	Dμoš]‰o r _i Z}}	‰o r _i	>]•š v]vRV> XîX>XóvšXî • šZ š •]Pv o }Œ }vÀ Ç l Ç š]o•U	• Œ]‰š}}v
đí	ï	Dμoš]‰o r _i Z}}	‰o r _i	>]•š v]vRV> XîX>XóvšXî • šZ š •]Pv o }Œ }vÀ Ç l Ç š]o•U • <μ v U }vv š}}v•U Œ o š}}v•Z]‰•U }v o μ• v l}Œ]vš Œ]vš]PŒ ro À o •‰}}l v]• }μŒ • X	• Œ]‰š}}v
đî	ï	Dμoš]‰o r _i Z}}	‰o r _i	>]•š v]vRV> XñX>XóvšXî • šZ š •]Pv o }Œ }vÀ Ç l Ç š]o•U • <μ v U }vv š}}v•U Œ o š}}v•Z]‰•U }v o μ• v l}Œ]vš Œ]vš]PŒ ro À o •‰}}l v]• }μŒ • X	}uu v]vPwμ vš v] vš](Ç Á Æ‰ v U }Œ }u‰o Æ]Pwšv • šZ š]u‰}Œ š vš]v]Á] μ o•U u]v] •U •μ‰‰}Œ š] }v }‰š•U Á] v U Á vš•U u μoš]‰o }‰}}]vš• o]š Œ ŒÇ Á] •U v l}Œ šZ]vu •• P }Œ šZ u PŒ ro À o •‰}}l v]• }μŒ • X
đï	ï	Dμoš]‰o r _i Z}}	‰o r _i	Z]vP W> XîXZZXóvšXî • šZ š •]Pv o }Œ }vÀ Ç l Ç š]o•U • <μ v U }vv š}}v•U Œ o š}}v•Z]‰•U }v o μ• v l}Œ]vš Œ]vš]PŒ ro À o •‰}}l v]• }μŒ • X	vš Œ]vPwμ vš u ÇU Á]šZ • μ •š vš] o •μ‰‰}Œ š]] vš](Ç (Á Á }Œ •U •Z}Œ š‰ZŒ ••U }Œ %Œ • vš v • š]Pv o]u‰}Œ š vš]v]Á] μ o•U u]v] •U •μ‰‰}Œ š]vP] •U }v }‰š•U Á] v U u μoš]‰o }‰}}]vš• } (Á] ÁU o]š Œ ŒÇ Á] •U u •• P }Œ š]Z u PŒ ro À o š ÆšX
đđ	ï	Dμoš]‰o r _i Z}}	‰o r _i	Z]vP W> XîXZZXóvšXî • šZ š •]Pv o }Œ }vÀ Ç l Ç š]o•U • <μ v U }vv š}}v•U Œ o š}}v•Z]‰•U }v o μ• v l}Œ]vš Œ]vš]PŒ ro À o •‰}}l v]• }μŒ • X	u ŒP]vPwμ vš v šZŒ]vš Œ o u v]vP]u‰]š PŒ ro À o š ÆšX
đň	ï	Dμoš]‰o r _i Z}}	‰o r _i	Z]vP W> XîXZZXóvšXî • šZ š •]Pv o }Œ }vÀ Ç l Ç š]o•U • <μ v U }vv š}}v•U Œ o š}}v•Z]‰•U }v o μ• v l}Œ]vš Œ]vš]PŒ ro À o š ÆšX	u ŒP]vPwμ vš vU Á]šZ u } Œ š •μ‰‰}Œ šU] vš](Ç •u Á}Œ •U %ZŒ ••U }Œ (Á •]u‰ • <μ v U }vv š}}v•U Œ o š}}v•Z]‰•U }v o μ• v l}Œ]vš Œ]vš]PŒ ro À o š ÆšX

îîEz^ ^> d
'OE • ótô /š u D %• ~ }vš]vµ •

ŽW OE({OEu v > À o • OE]‰š}}vld CEP š }(D •µOE u vš

/š u W}•]š]]v	d • š ^ • •]yš u dÇ‰W}}vš•D} o]šÇ W> ld}DŽ	Dµoš]‰o r í Z}}	‰W}}vš•D} o]šÇ W> ld}DŽ	Z]vP W> XöXZ	Z]vP W> XöXZ	• OE]‰š}}v
ðò	ï	Dµoš]‰o r í Z}}	‰W}}vš•D} o]šÇ W> ld}DŽ	Z]vP W> XöXZ	Z]vP W> XöXZ	Æ‰ v]všP W vš v] vš](Ç u}•š •]u‰o }OE •]U Æ‰ v }OE }u‰o Æ š}R ššZ OE šZ š Á] v U Á vš•U }OE]vCE š}}vU š Æš•X
ðó	ï	Dµoš]‰o r í Z}}	‰W}}vš•D} o]šÇ W> ld}DŽ	Z]vP W> XöXZ	Z]vP W> XöXZ	Æ‰ v]všP W vš v š}CEsu]Z o]š OE o v •]u } (šZ (]PµCE š]Á }OE }vv}š š]À u v (d] OE í v d] OE í Á}OE •]w }Z]OE]r]u‰o š o À o š ÆšX
ðô	ï	Dµoš]‰o r í Z}}	‰W}}vš•D} o]šÇ W> ld}DŽ	Z]vP W> XîXZ	Z]vP W> XîXZ	u CEP]všP W vš v U Á]šZ u} OE š •µ‰‰}CE š U] vš](Ç •]u Á}OE •U ‰ZCE ••U }OE (Á •]u‰o • vš v • š]Z vš o]u‰o}CE š vš]v]Á] µ o•U u]v] •]u •µ‰‰}CE š]vP] •U }v ‰š•U Á] v U uµoš]‰o ‰}}]vš•} (Á] ÁU o]š CE CEÇ Á] •U u ••P }OE š]Z u PCE ro À o š ÆšX
ðõ	ï	Dµoš]‰o r í Z}}	‰W}}vš•D} o]šÇ W> ld}DŽ	Z]vP W> XîXZ	Z]vP W> XîXZ	u CEP]všP W vš v šZCEw]]vš OE o u v]vP]u‰o]š PCE ro À o š ÆšX
ñì	ï	Dµoš]‰o r í Z}}	‰W}}vš•D} o]šÇ W> ld}DŽ	Z]vP W> XîXZ	Z]vP W> XîXZ	vš CE]všP W vš u ÇU Á]šZ •µ •š vš] o •µ‰‰}CE š] vš](Ç (Á Á}OE •U •Z}CE š ‰ZCE ••U }OE ‰O • <µ v U }vv š}}v•U OE o š}}v•Z]‰•U }v oµ• v l}OE]vš OE]vš]]RCE ro À o š ÆšX

• $\hat{\rho} \in \mathbb{R}^{d \times d}$
'CE • $\hat{\rho} / \text{tr}(\hat{\rho})$ • $\sim \text{Dir}(\nu \hat{\rho})$ •